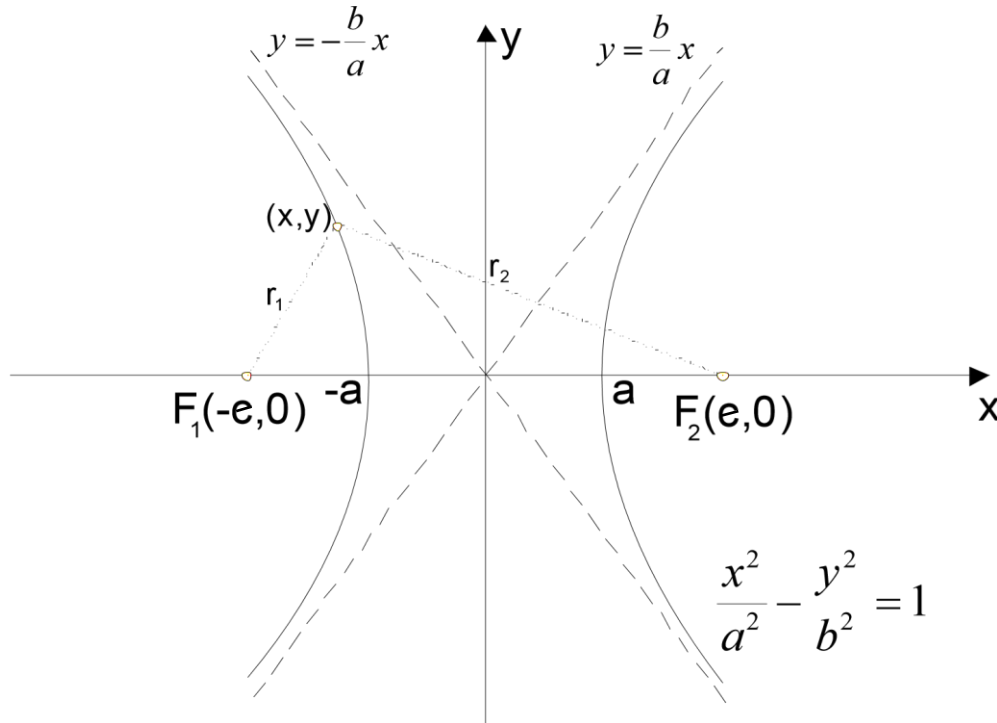


HIPERBOLA

Hiperbola je skup tačaka u ravni s osobinom da je razlika rastojanja ma koje tačke od dviju datih tačaka stalan broj.



a - je realna poluosa ($2a$ je realna osa)

b - je imaginarna poluosa ($2b$ je imaginarna osa)

r_1, r_2 su **potezi** (radijus vektori) i za njih važi $|r_1 - r_2| = 2a$

$F_1(-e, 0)$ $F_2(e, 0)$ su **žiže** hiperbole, gdje je $e^2 = a^2 + b^2$

prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole

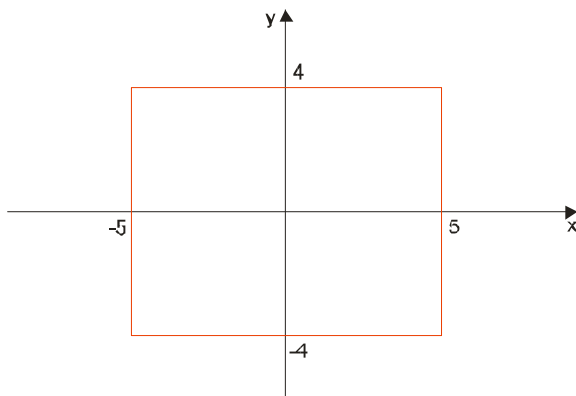
Jednačina hiperbole je $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ili $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Kako nacrtati datu hiperbolu?

Na primjer trebamo nacrtati hiperbolu $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

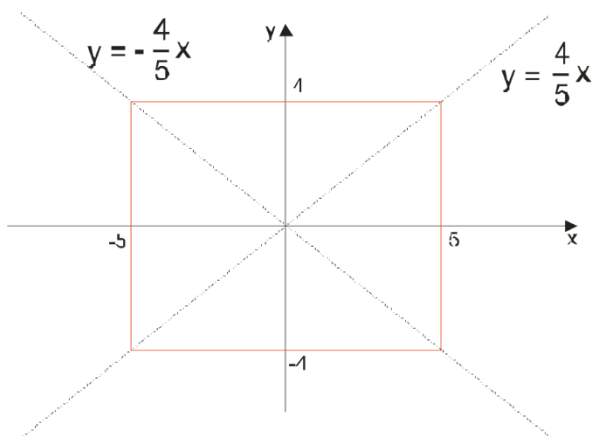
Upoređujući je sa opštom jednačinom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zaključujemo da je $a^2 = 25$ i $b^2 = 16$, odavde jasno da je $a = \pm 5, b = \pm 4$

Nacrtamo pravougaonik:

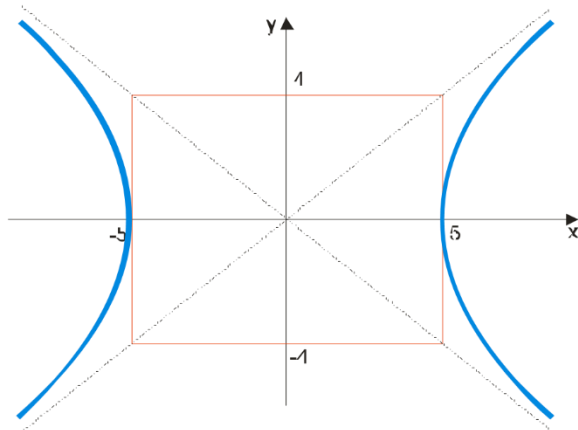


Asimptote su prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$, odnosno za naš primjer prave $y = \frac{4}{5}x$ i $y = -\frac{4}{5}x$

Na grafiku asimptote sadrže dijagonale ovog pravougaonika:



Sad crtamo hiperbolu:



Zadatak 1. Odrediti jednačinu hiperbole ako je razmjera njenih poluosa $3 : 4$ i $e = 15$.

Rješenje:

Upotrebicemo "trik sa k"

$$b : a = 3 : 4$$

$$b = 3k$$

$$a = 4k$$

$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$15^2 = (4k)^2 + (3k)^2$$

$$225 = 16k^2 + 9k^2$$

$$225 = 25k^2$$

$$k^2 = \frac{225}{25}$$

$$k^2 = 9$$

$$k = 3$$

Vratimo se da nađemo a i b.

$$b = 3k = 3 \cdot 3 = 9$$

$$a = 4k = 4 \cdot 3 = 12$$

$$b^2 = 9^2 = 81$$

$$a^2 = 12^2 = 144$$

Pa je hiperbola: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$

Zadatak 2. Odrediti jednačinu hiperbole ako je rastojanje između žiža jednako $10\sqrt{2}$, a jednačine njenih asimptota su $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Rješenje:

Rastojanje između žiža je $2e = 10\sqrt{2}$ pa je $e = 5\sqrt{2}$

$$y = \pm \frac{3}{4}x \text{ uporedimo sa } y = \pm \frac{b}{a}x \text{ i dobijamo } \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \rightarrow b = \frac{3}{4}a$$

Ovo zamijenimo u:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$(5\sqrt{2})^2 = a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2$$

$$25 \cdot 2 = a^2 + \frac{9}{16}a^2$$

$$50 = \frac{16 + 9}{16}a^2$$

$$50 = \frac{25}{16}a^2$$

$$a^2 = \frac{50}{\frac{25}{16}} = 32$$

Onda je $b^2 = e^2 - a^2 = 50 - 32 = 18$

Jednačina tražene hiperbole je : $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1$

Domaći zadatak:

1. Napisati jednačinu hiperbole za koju žiže imaju koordinate $(\pm 4, 0)$, a realna osa je 6.
2. Napisati jednačine asimptota hiperbola ako je realna osa 8, a rastojanje između žiža jednako 10.